Marius PERIANU • Ioan BALICA

Dumitru SĂVULESCU

Matematică

clasa a VII-a

I

art
educațional

CUPRINS

GEOMETRIE Capitolul 3. Patrulatere

GEOMETRIE Capitolul 4. Asemănarea triunghiurilor

CAPITOLUL 1

NUMERE RAȚIONALE

Tema 1.1

Mulţimea numerelor raţionale. Forme de scriere a numerelor raţionale

Număr raţional. Un număr x se numeşte *număr raţional* dacă există o pereche de numere întregi (a,b) cu $b \neq 0$, astfel încât $x = \frac{a}{b}$. Mulţimea numerelor raţionale se notează cu $\mathbb{Q}$ şi poate fi definită astfel: $\mathbb{Q} = \left\{ x \,\middle|\, \exists\, a,b \in \mathbb{Z}, b \neq 0, \text{ astfel încât } x = \frac{a}{b} \right\}$.

Observaţii. **1.** Are loc incluziunea $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

2. $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ este *mulţimea numerelor raţionale nenule.*

3. $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}_+$, unde $\mathbb{Q}_+$ reprezintă mulţimea numerelor raţionale pozitive, iar $\mathbb{Q}_-$ mulţimea numerelor raţionale negative.

Forme de scriere a numerelor raţionale

Un număr raţional poate fi reprezentat prin *fracţii ordinare echivalente* sau printr-o *fracţie zecimală finită* sau *periodică*.

Teoremă. Pentru orice număr raţional nenul q există o *unică fracţie ireductibilă* $\frac{a}{b}$, cu $a \in \mathbb{Z}$ şi $b \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $q = \frac{a}{b}$.

Transformarea fracţiilor ordinare în fracţii zecimale

Un număr raţional pozitiv reprezentat printr-o fracţie ireductibilă $\frac{a}{b}$, cu a, $b \in \mathbb{N}^*$, $b \geq 2$, se transformă, folosind algoritmul de împărţire a numerelor naturale, în:

a. fracţie zecimală finită dacă descompunerea lui b în produs de factori primi conţine numai factorii 2 sau 5.

b. fracţie periodică simplă dacă descompunerea lui b în produs de factori primi nu conţine nici factorul prim 2, nici factorul prim 5.

c. fracţie periodică mixtă dacă descompunerea lui în factori primi b conţine cel puţin unul din factorii primi 2 şi 5 şi cel puţin un alt factor prim diferit de 2 şi de 5.

Exemple.

a. fracţii zecimale *finite*: $\frac{37}{8} = \frac{37}{2^3} = 4,625$; $\frac{187}{50} = \frac{187}{2 \cdot 5^2} = 3,74$;

b. fracţii zecimale *periodice simple*: $\frac{138}{9} = \frac{138}{3^2} = 15,(3)$; $\frac{67}{33} = \frac{67}{3 \cdot 11} = 2,(03)$;

c. fracţii zecimale *periodice mixte*: $\frac{1}{55} = \frac{1}{5 \cdot 11} = 0,0(18)$; $\frac{503}{12} = \frac{503}{2^2 \cdot 3} = 41,9(6)$.

Transformarea fracțiilor zecimale în fracții ordinare

a. transformarea fracțiilor zecimale finite în fracții ordinare:

$$\overline{a_0,a_1a_2\ldots a_n}=a_0\frac{\overline{a_1a_2\ldots a_n}}{10^n}=\frac{\overline{a_0a_1a_2\ldots a_n}}{10^n}$$

b. transformarea fracțiilor zecimale periodice simple în fracții ordinare:

$$\overline{a_0,(a_1a_2\ldots a_p)}=a_0\frac{\overline{a_1a_2\ldots a_p}}{\underbrace{99\ldots9}_{p\text{ cifre}}}$$

c. transformarea fracțiilor zecimale periodice mixte în fracții ordinare:

$$\overline{a_0,a_1a_2\ldots a_n(b_1b_2\ldots b_p)}=a_0\frac{\overline{a_1a_2\ldots a_nb_1b_2\ldots b_p}-\overline{a_1a_2\ldots a_n}}{\underbrace{99\ldots9}_{p\text{ cifre}}\underbrace{00\ldots0}_{n\text{ cifre}}}$$

Exemple. **a.** $15,34=15\frac{34}{100}=\frac{1534}{100}$; $0,8=\frac{8}{10}$; $6,534=\frac{6534}{1000}$.

b. $0,(17)=\frac{17}{99}$; $5,(8)=5\frac{8}{9}$; $403,(295)=403\frac{295}{999}$.

c. $2,5(13)=2\frac{513-5}{990}=2\frac{508}{990}$; $0,27(568)=\frac{27568-27}{99900}=\frac{27541}{99900}$

---

*

1. Scrieți trei exemple de numere:

a) naturale; *b)* întregi negative; *c)* raționale, care nu sunt întregi.

2. Dintre propozițiile de mai jos, menționați-le pe cele adevărate:

a) $-3\in\mathbb{Q}$; *b)* $-\frac{5}{7}\in\mathbb{Q}$; *c)* $\frac{11}{3}\in\mathbb{Z}$; *d)* $-\frac{6}{3}\in\mathbb{Z}$; *e)* $\frac{9}{11}\notin\mathbb{Z}$;

f) $-\frac{5}{8}\in\mathbb{Q}_-$; *g)* $-41\in\mathbb{N}$; *h)* $23\notin\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$; *i)* $-\frac{5}{11}\notin\mathbb{Q}_+$; *j)* $-\frac{5}{11}\in\mathbb{Q}$.

3. Determinați elementele mulțimii: $C=\left\{x=\frac{a}{b}\,\middle|\,a\in\{-2,1,3\}\text{ și }b\in\{-4,0,5\}\right\}$.

4. Fie $M=\left\{-9;23;\frac{5}{7};-\frac{13}{4};0;-11;105;\frac{1}{6};\frac{29}{14};-18\right\}$. Determinați mulțimile:

$A=\{x\in M\mid x\in\mathbb{N}\}$; $B=\{x\in M\mid x\in\mathbb{Z}_-\}$; $C=\{x\in M\mid x\in\mathbb{Q}_+\}$;

$D=\{x\in M\mid x\notin\mathbb{Z}\}$; $E=\{x\in M\mid x\in\mathbb{Q}^*\}$; $F=\{x\in M\mid x\in\mathbb{Z}_+\}$;

$G=\{x\in M\mid x\in\mathbb{Q}_-\}$; $H=\{x\in M\mid x\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}\}$; $I=\{x\in M\mid x\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}\}$.

Rezolvare. $C=\left\{23;\frac{5}{7};105;\frac{1}{6};\frac{29}{14};0\right\}$; $G=\left\{-9;\ -\frac{13}{4};-11;\ -18\right\}$.

5. Transformați următoarele fracții ordinare în fracții zecimale, eventual amplificându-le convenabil:

a) $\frac{1}{5}$; *b)* $\frac{2}{10}$; *c)* $\frac{153}{10}$; *d)* $\frac{77}{25}$; *e)* $\frac{31}{4}$;
f) $\frac{5947}{100}$; *g)* $\frac{23857}{1\,000}$; *h)* $\frac{7}{125}$; *i)* $\frac{2001}{16}$; *j)* $\frac{212}{625}$.

Rezolvare. *d)* ${}^{4)}\frac{77}{25}=\frac{308}{100}=3{,}08$.

6. Transformați următoarele fracții ordinare în fracții zecimale, eventual simplificându-le convenabil:

a) $\frac{28}{20}$; *b)* $\frac{18}{10}$; *c)* $\frac{35}{50}$; *d)* $\frac{128}{200}$; *e)* $\frac{150}{60}$;
f) $\frac{36}{400}$; *g)* $\frac{180}{90}$; *h)* $\frac{12}{30}$; *i)* $\frac{56}{700}$; *j)* $\frac{375}{1250}$.

Rezolvare. *e)* $\frac{150^{(6}}{60}=\frac{25}{10}=2{,}5$.

7. Reprezentați următoarele numere raționale sub formă de fracție zecimală:

a) $\frac{2}{3}$; *b)* $\frac{3}{7}$; *c)* $\frac{5}{11}$; *d)* $\frac{237}{9}$; *e)* $\frac{51}{13}$;
f) $\frac{27}{11}$; *g)* $\frac{700}{37}$; *h)* $\frac{507}{33}$; *i)* $\frac{40}{101}$; *j)* $\frac{40}{41}$.

Rezolvare. *b)* Împărțim numărătorul la numitor:

$3:7=0{,}428571428571...$, deci $\frac{3}{7}=0,(428571)$.

8. Reprezentați următoarele numere raționale sub formă de fracție zecimală:

a) $\frac{1}{6}$; *b)* $\frac{23}{15}$; *c)* $\frac{14}{55}$; *d)* $\frac{304}{75}$; *e)* $\frac{83}{12}$;
f) $\frac{871}{60}$; *g)* $\frac{13}{14}$; *h)* $\frac{18}{55}$; *i)* $\frac{101}{35}$; *j)* $\frac{35}{24}$.

9. Reprezentați sub formă de fracție ordinară fiecare dintre numerele următoare:

a) 0,14; *b)* 5,7; *c)* 39,183; *d)* 51,51; *e)* 34,007;
f) 296,8; *g)* 8,301; *h)* 0,0018; *i)* 0,003001; *j)* 1,234.

Rezolvare. *i)* $0{,}003001=\frac{3001}{10^6}=\frac{3001}{1000000}$.

10. Reprezentați sub formă de fracție ordinară fiecare dintre numerele următoare:

a) 0,(5); *b)* 13,(7); *c)* 5,(31); *d)* 102,(703); *e)* 81,(54);
f) 14,(8); *g)* 0,(07); *h)* 0,(0012); *i)* 3,(14); *j)* 1,(234).

Rezolvare. *f)* $14,(8)=14\frac{8}{9}=\frac{134}{9}$.

h) $0,(0012)=\dfrac{12}{9999}$.

11. Reprezentați sub formă de fracție ordinară fiecare dintre numerele următoare:

a) 0,0(5); *b*) 2,1(24); *c*) 0,12(5); *d*) 103,8(203); *e*) 54,5(43);
f) 7,2(140); *g*) 5,1(5); *h*) 5,10(5); *i*) 8,51(3070); *j*) 1,2(34).

Rezolvare. *i*) $8,51(3070)=8\dfrac{513070-51}{999900}=\ldots$.

**

12. Folosind descompunerea în factori primi a numitorului, stabiliți în ce tip de fracție zecimală (finită, periodică simplă sau periodică mixtă) se transformă următoarele fracții ireductibile:

a) $\dfrac{4}{49}$; *b*) $\dfrac{5}{98}$; *c*) $\dfrac{121}{32}$; *d*) $\dfrac{345}{14}$; *e*) $\dfrac{14}{135}$;
f) $\dfrac{7}{66}$; *g*) $\dfrac{1}{125}$; *h*) $\dfrac{3}{85}$; *i*) $\dfrac{2}{207}$; *j*) $\dfrac{10001}{606}$.

Rezolvare. *f*) $66=2\cdot3\cdot11$. Descompunerea în factori primi a numitorului conține, factorul prim 2 (deci cel puțin unul dintre factorii primi 2 și 5), și factorii primi 3 și 11 (deci cel puțin un factor prim diferit de 2 și de 5). Prin urmare, fracția ordinară dată se va transforma în fracție zecimală periodică mixtă.

13. Determinați, în fiecare din situațiile următoare, numerele întregi n pentru care relațiile următoare reprezintă propoziții adevărate:

a) $\dfrac{6}{n}\in\mathbb{N}$; *b*) $\dfrac{12}{n+1}\in\mathbb{N}$; *c*) $\dfrac{15}{3n+1}\in\mathbb{N}$; *d*) $\dfrac{18}{2n-1}\in\mathbb{Z}$;
e) $\dfrac{13}{2n+1}\in\mathbb{Z}_+$; *f*) $\dfrac{9n+14}{3n+1}\in\mathbb{Z}$; *g*) $\dfrac{5n-2}{2n+3}\in\mathbb{Z}$; *h*) $\dfrac{17n-25}{5n+7}\in\mathbb{Z}$.

Rezolvare. *c*) $\dfrac{15}{3n+1}\in\mathbb{N}\Leftrightarrow 3n+1\in D_{15}\Leftrightarrow\ldots$

f) $\dfrac{9n+14}{3n+1}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow 3n+1\,|\,9n+14$ ...
Dar $3n+1\,|\,3n+1\ |\cdot3$

14. Dați câte trei exemple de numere naturale n pentru care fracția $\dfrac{8}{n+1}$ este:

a) supraunitară; *b*) ireductibilă; *c*) reductibilă;
d) zecimală finită; *e*) periodică simplă; *f*) periodică mixtă.

15. Stabiliți valoarea de adevăr a fiecăreia dintre următoarele propoziții, enunțând câte un contraexemplu în cazul propozițiilor false.

a) „Orice număr natural este număr întreg."
b) „Orice număr întreg este număr rațional".
c) „Orice număr întreg este număr natural."
d) „Dacă un număr este rațional, atunci numărul este întreg."
e) „Dacă un număr nu este întreg, atunci numărul nu este natural."

Rezolvare. *c)* Fals. Contraexemplu: $-3 \in \mathbb{Z}$, dar $-3 \notin \mathbb{N}$.

16. Se consideră numerele: $a = 15{,}124$, $b = 28{,}(62)$ și $c = 1{,}2(175)$.
a) Determinați a 3-a cifră după virgulă a fiecărui număr de mai sus;
b) Determinați a 30-a cifră după virgulă a fiecărui număr de mai sus;
c) Determinați suma primelor 100 zecimale ale fiecărui număr de mai sus.

17. *a)* Determinați a 70-a și a 90-a cifră după virgulă a numărului 3,24531(4596).
b) Un număr rațional este reprezentat printr-o fracție zecimală periodică mixtă. Partea zecimală neperiodică are 5 cifre, iar perioada este formată din 4 cifre. Arătați că a 70-a și a 90-a cifră de la partea zecimală sunt egale.
Rezolvare. *b)* Cum $70 - 5 = 65$ și $65 : 4 = 16$ rest 1, a 70-a zecimală este prima cifră a părții periodice.Continuați voi!

18. *a)* Determinați cifra *x*, știind că $\overline{0,x(15)} = \dfrac{71}{330}$.
b) Determinați cifrele *x*, *y* pentru care are loc egalitatea $\overline{2,(3xy1)} = \dfrac{241}{101}$.
c) Determinați cifrele *x*, *y*, *z* pentru care are loc egalitatea $\overline{0,x8(y4z)} = \dfrac{27}{148}$.

19. Arătați că următoarele fracții sunt ireductibile, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$:

a) $\dfrac{n}{n+1}$; *b)* $\dfrac{n+1}{2n+3}$; *c)* $\dfrac{3n-5}{4n-7}$; *d)* $\dfrac{6n+7}{7n+8}$.

Rezolvare. *a)* Fie $d \in \mathbb{N}^*$ un divizor comun al numerelor n și $n+1$. Cum $d \mid n$ și $d \mid n+1$, rezultă că $d \mid n+1-n$,...

20. *a)* Determinați numerele naturale *n* pentru care fracția $\dfrac{n+1}{n+3}$ este reductibilă.
b) Determinați suma celor mai mici 100 numerele naturale nenule *n* pentru care fracția $\dfrac{n+1}{n+3}$ este reductibilă.

Rezolvare. *a)* Dacă fracția dată se simplifică prin numărul natural *d*, atunci $d \mid n+1$ și $d \mid n+3$, deci $d \mid$...

21. Determinați cifrele *a*, *b*, *c* diferite de 9, astfel încât $a + c = 2b$ și pentru care are loc egalitatea $\overline{a,b(c)} + \overline{b,c(a)} + \overline{c,a(b)} = 13{,}(3)$.

Indicație. $\overline{a,b(c)} = a\dfrac{\overline{bc} - b}{90} = a + \dfrac{10b + c - b}{90} = \ldots$

22. Determinați cifrele *a* și *b* în baza zece pentru care are loc egalitatea $\dfrac{a}{b} = \overline{b,a}$.

23. Aflați numărul $\overline{abc}$, știind că: $\dfrac{\overline{abc}}{29} = \dfrac{\overline{bca}}{68} = \dfrac{\overline{cab}}{14}$.

Indicație. $\dfrac{\overline{abc}}{29} = \dfrac{\overline{bca}}{68} = \dfrac{\overline{cab}}{14} = \dfrac{\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}}{29 + 68 + 14} = \ldots$

***

24. Se consideră numărul $N = \dfrac{\overline{abc}+91}{\overline{abc}-10}$. Calculați $a+b+c$, știind că $N \in \mathbb{N}$.

Indicație. Scriem numărul N în felul următor:

$$N = \frac{\overline{abc}+91}{\overline{abc}-10} = \frac{\overline{abc}-10+101}{\overline{abc}-10} = 1+\frac{101}{\overline{abc}-10}.$$

Cum $N \in \mathbb{N}$, rezultă că $\overline{abc}-10 \mid 101$.

25. Fie $S = \overline{a,b(c)} + \overline{b,c(a)} + \overline{c,a(b)}$, unde a, b, c sunt cifre nenule ale sistemului zecimal, invers proporționale cu $\dfrac{1}{1+bc}, \dfrac{1}{1+ca}, \dfrac{1}{1+ab}$. Determinați a, b, c știind că S este un număr natural.

26. Se dau mulțimile $A = \left\{ x \,\middle|\, x = \dfrac{2m-1}{2m-3}, m \in \mathbb{N} \right\}$ și $B = \left\{ x \,\middle|\, x = \dfrac{3p+1}{3p-2}, p \in \mathbb{N} \right\}$.

Arătați că A și B sunt mulțimi disjuncte.

27. Fie p un număr prim pentru care $p+2$ este număr prim, mai mic decât 30. Se știe că există numerele $x, y \in \mathbb{N}^*$, astfel încât să aibă loc relația $\dfrac{p+2}{p} = 1 + \dfrac{1}{x+\dfrac{1}{y}}$.

a) Demonstrați că $y = 2$.

b) Câte triplete (p, x, y) verifică condițiile date?

Probleme de șapte stele

28. Fie $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{Q}^*$, astfel încât $x = bc + \dfrac{1}{a}$, $y = ca + \dfrac{1}{b}$, $z = ab + \dfrac{1}{c}$ și $ax + by + cz = 1$. Arătați că $xyz < 0$.

29. Arătați că mulțimea $A = \left\{ \dfrac{993}{2}, \dfrac{994}{3}, \dfrac{995}{4}, \ldots \right\}$ conține un singur număr natural.

30. Fie $A = \dfrac{(3x+y)(z-x)(2x+2y+z)(3x+3z-x)}{210}$, unde $x, y, z \in \mathbb{N}$, astfel încât $17x + 5y - 2z = 0$. Demonstrați că A este un număr natural pătrat perfect.

SOLUŢII

ALGEBRĂ

CAPITOLUL 1

Numere raţionale

1.1. Mulţimea numerelor raţionale. Forme de scriere a numerelor raţionale

2. *a)* A; *b)* A; *c)* F; *d)* A; *e)* A; *f)* A; *g)* F; *h)* A; *i)* A; *j)* A. **3.** $C=\left\{\frac{-2}{-4};\frac{-2}{+5};\frac{1}{-4};\frac{1}{+5};\frac{3}{-4};\frac{3}{+5}\right\}$.

4. $A=\{23;0;105\}$; $B=\{-9;-11;-18\}$; $D=\left\{\frac{5}{7};-\frac{13}{4};\frac{1}{6};\frac{29}{14}\right\}$;

$E=\left\{23;\frac{5}{7};-9;-\frac{13}{4};-11;105;\frac{1}{6};\frac{29}{14};-18\right\}$; $F=\{23;105;0\}$; $H=\{-9;-11;-18\}$;

$I=\left\{\frac{5}{7};\ -\frac{13}{4};\frac{1}{6};\ \frac{29}{14}\right\}$. **5.** *a)* 0,2; *b)* 0,2; *c)* 15,3; *e)* 7,75; *f)* 59,47; *g)* 23,857; *h)* 0,056; *i)* 125,0625; *j)* 0,3392. **6.** *a)* 1,4; *b)* 1,8; *c)* 0,7; *d)* 0,64; *f)* 0,09; *g)* 2; *h)* 0,4; *i)* 0,08; *j)* 0,3. **7.** *a)* 0,(6); *c)* 0,(45); *d)* 26,(3); *e)* 3,(923076); *f)* 2,(45); *g)* 18,(918); *h)* 15,(36); *i)* 0,(3960); *j)* 0,(97560). **8.** *a)* 0,1(6); *b)* 1,5(3); *c)* 0,2(54); *d)* 4,05(3); *e)* 6,91(6); *f)* 14,51(6); *g)* 0,9(285714); *h)* 0,3(27); *i)* 2,8(857142); *j)* 1,458(3). **9.** *a)* $\frac{14}{100}$; *b)* $\frac{57}{10}$; *c)* $\frac{39183}{1000}$; *d)* $\frac{5151}{100}$; *e)* $\frac{34007}{1000}$; *f)* $\frac{2968}{10}$; *g)* $\frac{8301}{1000}$; *h)* $\frac{18}{10000}$; *j)* $\frac{1234}{1000}$. **10.** *a)* $\frac{5}{9}$; *b)* $13\frac{7}{9}$; *c)* $5\frac{31}{99}$; *d)* $102\frac{703}{999}$; *e)* $81\frac{54}{99}$; *g)* $\frac{7}{99}$; *i)* $3\frac{14}{99}$; *j)* $1\frac{234}{999}$. **11.** *a)* $\frac{5}{90}$; *b)* $2\frac{123}{990}$; *c)* $\frac{113}{900}$; *d)* $103\frac{8195}{9990}$; *e)* $54\frac{538}{990}$; *f)* $7\frac{2138}{9990}$; *g)* $5\frac{14}{90}$; *h)* $5\frac{95}{900}$; *i)* $8\frac{513019}{999900}$; *j)* $1\frac{232}{990}$. **12.** *a)* fracţie periodică simplă; *b)* fracţie periodică mixtă; *c)* fracţie zecimală finită; *d)* fracţie periodică mixtă; *e)* fracţie periodică mixtă; *f)* fracţie periodică mixtă; *g)* fracţie zecimală finită; *h)* fracţie periodică mixtă; *i)* fracţie periodică simplă; *j)* fracţie periodică mixtă. **13.** *a)* $n\in\{1;2;3;6\}$; *b)* $n\in\{0;1;2;3;5;11\}$; *c)* $n\in\{0\}$; *d)* $n\in\{-4;-1;0;1;2;5\}$; *e)* $n\in\{0;6\}$; *f)* $n\in\{-4;0\}$; *g)* $n\in\{-11;-2;-1;8\}$; *h)* $n\in\{-1;23\}$. **14.** *a)* $n\in\{1;2;4\}$; *b)* $n\in\{2;4;12\}$; *c)* $n\in\{5;13;27\}$; *d)* $n\in\{4;9;24\}$; *e)* $n\in\{2;8;26\}$; *f)* $n\in\{14;29;44\}$. **15.** *a)* A; *b)* A; *d)* F. Contraexemplu: $\frac{3}{2}\in\mathbb{Q}$, dar $\frac{3}{2}\notin\mathbb{Z}$; *e)* A. **16.** *a)* 4, 6, respectiv 7; *b)* 0, 2, respectiv 7; *c)* 7, 400, respectiv 431. **17.** *a)* A 70-a şi a 90-a zecimală sunt egale cu 4; *b)* Cum $90-5=85$ şi $85:4=21$ rest 1, a 90-a zecimală este prima cifră a părţii periodice.

18. *a)* $\overline{0,x(15)}=\frac{\overline{x15}-x}{990}=\frac{100x+15-x}{990}=\frac{99x+15}{990}=\frac{3(33x+5)}{990}=\frac{33x+5}{330};\frac{33x+5}{330}=\frac{71}{330}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x=2$; *b)* $x=8,y=6$; *c)* $x=1,y=2,z=3$. **19.** *b)* Fie $d\in\mathbb{N}^*$ un divizor comun al numerelor $n+1$ şi $2n+3$. Cum $d|n+1$ şi $d|2n+3$, rezultă că $d|2n+2$ şi $d|2n+3$, de unde

$d|1$, adică $d=1$. Prin urmare, fracția dată este ireductibilă. **20.** *a)* Dacă fracția dată se simplifică prin numărul natural d, atunci $d \mid n+1$ și $d \mid n+3$, deci $d \mid 2$. Ca urmare, $d=2$, ceea ce implică $n=2k+1,\ \ k\in\mathbb{N}$; *b)* $S=1+3+5+...+199=200\cdot 50=10000$.

21. $a\frac{\overline{bc}-b}{90}+b\frac{\overline{ca}-c}{90}+c\frac{\overline{ab}-a}{90}=13\frac{3}{9}\Leftrightarrow a+b+c+\frac{10b+c-b+10c+a-c+10a+b-a}{90}=$

$=\frac{40}{3}\Leftrightarrow a+b+c+\frac{10(a+b+c)}{90}=\frac{40}{3}\Leftrightarrow\frac{10(a+b+c)}{9}=\frac{40}{3}\Leftrightarrow a+b+c=12$. Rezultă $b=4$, de unde $(a;b;c)\in\{(0;4;8);(1;4;7);(2;4;6);(3;4;5);(4;4;4);(5;4;3);(6;4;2);(7;4;1);(8;4;0)\}$

22. $\frac{a}{b}=\overline{b,a}\Rightarrow b\in\{2,5\}$. Dacă $b=2\Rightarrow\frac{a}{2}=\overline{2,a}=\frac{2a}{10}\Rightarrow a=5$. Pentru $b=5$ nu sunt soluții.

23. $\frac{\overline{abc}}{29}=\frac{\overline{bca}}{68}=\frac{\overline{cab}}{14}=\frac{111(a+b+c)}{111}=a+b+c\in\mathbb{N}$. $\frac{10\overline{ab}+c}{29}=\frac{100c+\overline{ab}}{14}\Rightarrow 140\overline{ab}+14c=$ $=2900c+29\overline{ab}\Rightarrow\overline{ab}=26c\Rightarrow c\in\{1,2,3\}$. Singura variantă posibilă este $c=1$, deci $\overline{abc}=261$. **24.** $\overline{abc}-10 \mid 101$. Dar 101 este număr prim $\Rightarrow \overline{abc}-10=101\Rightarrow\overline{abc}=111$. **25.** $\frac{a}{1+bc}=\frac{b}{1+ca}=\frac{c}{1+ab}\Rightarrow a(1+ca)=b(1+bc)$ și analoagele $\Rightarrow a=b=c$. Se obține $S=\frac{10(a+b+c)}{9}=\frac{30a}{9}=\frac{10a}{3}\in\mathbb{N}\Rightarrow 3|a \Rightarrow a\in\{3,6,9\}$. Deci $(a,b,c)\in\{(3,3,3),(6,6,6),(9,9,9)\}$. **26.** Presupunem că $A\cap B\neq\varnothing$. Atunci există $m,p\in\mathbb{N}$, astfel încât $\frac{2m-1}{2m-3}=\frac{3p+1}{3p-2}\Rightarrow\frac{2}{2m-3}=\frac{3}{3p-2}\Rightarrow 2(3p-2)=3(2m-3)$, deci un număr par este egal cu un număr impar. **27.** *a)* $\frac{p+2}{p}=1+\frac{y}{xy+1}\Rightarrow 1+\frac{2}{p}=1+\frac{y}{xy+1}\Rightarrow 2x+\frac{2}{y}=p$. Dar $x,y,p\in\mathbb{N}^*$, p prim, deci $y=2$;

b) $p=2x+1$. Se obține $(p,x,y)\in\{(3,1,2),(5,2,2),(11,5,2),(17,8,2)\}$. **28.** $ax+by+cz=1\Rightarrow$ $a\left(bc+\frac{1}{a}\right)+b\left(ca+\frac{1}{b}\right)+c\left(ab+\frac{1}{c}\right)=1\Rightarrow abc=-\frac{2}{3}$. $xyz=\left(bc+\frac{1}{a}\right)\cdot\left(ca+\frac{1}{b}\right)\cdot\left(ab+\frac{1}{c}\right)=$ $a^2b^2c^2+3abc+3+\frac{1}{abc}=-\frac{1}{18}<0$. **29.** Observăm că elementele lui A sunt de forma $1+\frac{991}{n}$, $n\in\mathbb{N},n\geq 2$. $1+\frac{991}{n}\in\mathbb{N}\Rightarrow n|991\Rightarrow n=991$, deoarece 991 este prim. Singurul nr. natural din A este $\frac{991+991}{991}=2$. **30.** $z=\frac{17x+5y}{2}=8x+2y+\frac{x+y}{2}\in\mathbb{N}\Rightarrow\frac{x+y}{2}=a\ ,\ \ a\in\mathbb{N}$. Deci $y=2a-x$ și $z=5a+6x$. Atunci $A=\frac{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot(x+a)^2(2x+3a)^2}{210}=\left[(x+a)(2x+3a)\right]^2$.

1.2. Reprezentarea numerelor raționale pe axă. Compararea numerelor raționale

3. *a)* 7; *b)* 8,17; *c)* 0; *d)* 0,583; *e)* 4,5; *f)* $\frac{3}{5}$; *g)* $\frac{9}{7}$; *h)* 3; *i)* 2,0(3); *j)* $2\frac{2}{11}$. **5.** $-2,-1,0,1,2$.